

Zum Materialgesetz eines elastischen Mediums mit Momentenspannungen

F. HEHL und E. KRÖNER

Institut für Theoretische Physik der Bergakademie Clausthal — Technische Hochschule

(Z. Naturforschg. 20 a, 336—350 [1965]; eingegangen am 8. August 1964)

If through an element of area of a continuum there acts not only a force but also a couple, we have to introduce besides the force-stresses the so-called couple-stresses. In this article we emphasize the importance of couple-stresses in dislocated solids.—§ 2 gives a short review of the present state of the theory of couple-stresses. In classical elasticity couple-stresses are to be interpreted as a non-local effect intimately connected with the range of the atomic forces. The couple-stresses are of a higher order in this range than force-stresses and can therefore usually be neglected.

In the field theory of dislocations couple-stresses generally are of the same order of magnitude as force-stresses, however. Hence they cause considerable effects. In § 3 we determine the macroscopic observable couple-stresses of homogeneously distributed screw and edge dislocations through averaging over their microscopic fluctuating stress field. With the PEIERLS model we show in § 4 that the core of a dislocation produces an asymmetric state of stress and for that reason also couple-stresses, which are negligibly small under certain circumstances. Introducing a simple polycrystal model we derive in § 5 the constitutive relations for couple-stresses and dislocation density in an isotropic form. The results are discussed in § 6.

§ 1. Einleitung

Ein bei hinreichend hoher Temperatur *plastisch* gebogener Balken aus kristallinem Material besitzt überschüssige Stufenversetzungen eines Vorzeichens, die makroskopisch homogen verteilt sind (Abb. 1).

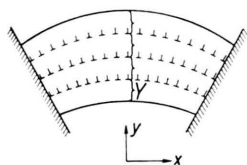


Abb. 1. Makroskopisch homogene Stufenversetzungsverteilung in einem plastisch gebogenen Balken (schematisch).

Einen Versetzungszustand dieser Art können wir uns folgendermaßen hergestellt denken: Wir nehmen rechteckige Platten der Dicke Y , deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen seien (Abb. 2 a). Lassen wir an den zur x -Achse senkrechten Ebenen Momente M_3 von bestimmter Größe angreifen (Abb. 2 b), so erhalten die Platten eine *elastische* Biegekrümmung K_{13} gemäß

$$M_3 = \frac{E Y^3 Z}{12} K_{13}. \quad (1.1)$$

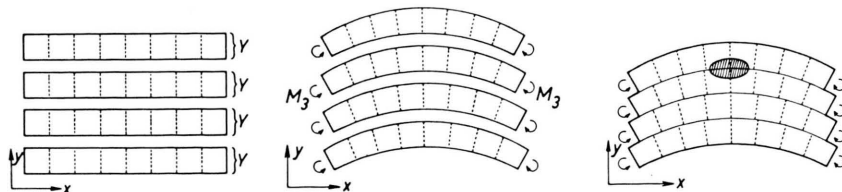


Abb. 2 a. Rechteckige Platten der Dicke Y .

Abb. 2 b. Elastisches Biegen der Platten.

Abb. 2 c. Zusammenschweißen der Platten ³⁰.

E ist dabei der Elastizitätsmodul, Z die Breite der Platten in z -Richtung. Verschweißen wir die Platten (Abb. 2 c), so bleibt ihr Biegezustand (1.1) erhalten, da durch die zur y -Achse senkrechten Oberflächen keine Kräfte hindurchgreifen.

Sind nun die Platten aber *kristallin* aufgebaut, beispielsweise kubisch primitiv mit BRAVAIS-Vektoren parallel zu den Koordinatenachsen, so tritt an den Schweißstellen in y -Richtung ein Sprung in der Gitterkonstanten auf, der doch eine Wechselwirkung zwischen den Platten hervorruft. Da zumindest in Metallen die Kohäsionskräfte kurzreichend sind, wirken dabei näherungsweise auf die Atome der untersten Netzebene einer Platte nur in x -Richtung weisende Kräfte von der obersten Atomebene der benachbarten Platte und umgekehrt (Abb. 3 a), ein Effekt, der durch ein an den x -Flächen zusätzlich angreifendes Drehmoment M_3^p erfaßt werden kann. Aus energetischen Gründen ist der in Abb. 3 a gezeichnete Zustand bekanntlich instabil und es kommt zur Ausbildung einzelner Stufenversetzungen (Abb. 3 b), was jedoch an dem eben beschriebenen Sachverhalt qualitativ nichts ändert.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

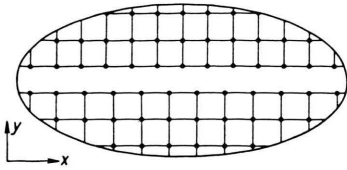


Abb. 3 a. Instabile Anordnung bei ein-kristallinem Aufbau der Platten.

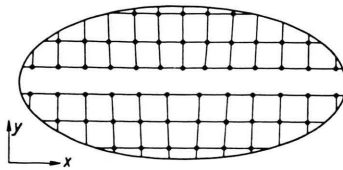


Abb. 3 b. Stabile Anordnung nach Ausbildung von Stufenversetzungen.

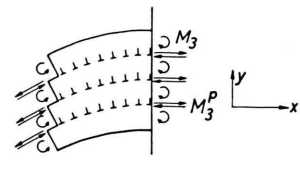


Abb. 3 c. Messung der Momentenspannungen im Schnittversuch.

Damit haben wir durch unseren Gedankenversuch eine Versetzungsanordnung wie in Abb. 1 gewonnen. Wir sehen vor allem zweierlei: Der *geometrische* Zustand der Abb. 1 kann makroskopisch durch eine Krümmung K_{ij} beschrieben werden – nämlich durch die Plattenkrümmung der Abb. 2 b bzw. 2 c –, die sich nach NYE¹ folgendermaßen in der Versetzungsdichte α_{ij} ausdrückt *:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \alpha_{kk} - \alpha_{ji}. \quad (1.2)$$

In Abb. 1 ist davon nur die Komponente K_{13} von Null verschieden.

In entsprechender Weise wird der *statische* Zustand makroskopisch durch Momentenspannungen τ_{ij} erfaßt^{2,3}, welche, wie ein Schnittversuch zeigt (Abb. 3 c), aus zwei Anteilen resultieren: Aus dem zur Biegung der Platten notwendigen Moment M_3 und aus dem an der Schweißstelle zusätzlich auftretenden Moment M_3^p . M_3 wird durch eine elastizitätstheoretische Rechnung ermittelt, während M_3^p zumindestens qualitativ und seinem Vorzeichen nach durch das halb gittertheoretische Versetzungsmodell von PEIERLS⁴ verstanden werden kann.

Ist ΔF_i ein beliebig orientiertes makroskopisches Flächenelement, durch das ein Drehmoment Δt_i hindurchgreift, so sind die *Momentenspannungen* gemäß

$$\Delta t_i = \tau_{ij} \Delta F_j \quad (1.3)$$

definiert. In Abb. 1 ist also nur die Komponente

$$\tau_{13} = (M_3 + M_3^p)/YZ \quad (1.4)$$

von Null verschieden. Da sich für Schraubenversetzungen Analoges ergibt, kann man folgendes sagen: Sind in einem kristallinen Festkörper Versetzungen homogen verteilt, so antwortet das Ma-

terial makroskopisch gesehen mit Momentenspannungen. Diese Arbeit soll dem Studium des entsprechenden *Materialgesetzes* dienen.

In § 2 verschaffen wir uns einen allgemeinen Überblick über das Gebiet der Momentenspannungen. In § 3 werden elastizitätstheoretisch die von makroskopisch homogenen Versetzungsverteilungen (Abb. 4, 5) verursachten Momentenspannungen berechnet und gewisse Beziehungen zum 2-dimensionalen COSSERAT-Kontinuum aufgedeckt. Der hierbei vernachlässigte Beitrag des Versetzungszentrums wird in § 4 mit Hilfe des PEIERLSSchen Modells besprochen. In § 5 führen wir ein einfaches Vielkristallmodell ein und erhalten dadurch das die Versetzungsdichte und die Momentenspannungen verbindende Materialgesetz in isotroper Form. In § 6 diskutieren wir die Ergebnisse.

§ 2. Allgemeines über Momentenspannungen

Bereits im letzten Jahrhundert hat VOIGT⁵ dem Begriff der Kraftspannungen σ_{ij} – meist als Spannungen schlechthin bezeichnet – den analogen Begriff der Momentenspannungen τ_{ij} an die Seite gestellt [vgl. (1.3)]. In bekannter Weise findet man als Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte und Momente die ebenfalls schon von VOIGT vollständig angegebenen statischen Grundgleichungen (f_j = Volumkräfte, c_j = Volummomente):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{ij,i} = -f_j, \quad (2.1)$$

$$\tau_{ij,i} + \epsilon_{jkl} \sigma_{[kl]} = -c_j. \quad (2.2)$$

Man vergleiche hierzu auch die Handbuchartikel von HELLINGER⁶, HEUN⁷ sowie TRUESDELL und TOUPIN⁸.

¹ J. F. NYE, Acta Met. 1, 153 [1953].

* Wir rechnen stets in kartesischen Koordinaten; über doppelt vorkommende Indizes werde summiert. δ_{ij} bezeichnet das KRONECKER-Symbol, ϵ_{ijk} den total antisymmetrischen Einheitstensor 3. Stufe.

² E. KRÖNER, Arch. Rational Mech. Anal. 4, 273 [1960].

³ E. KRÖNER, Int. J. Engng. Sci. 1, 261 [1963].

⁴ R. E. PEIERLS, Proc. Phys. Soc., Lond. 52, 34 [1940].

⁵ W. VOIGT, Abh. königl. Ges. Wiss. Göttingen (math. Kl.) 34, 3 [1887].

⁶ E. HELLINGER, Enc. math. Wiss. IV, 4, Art. 30 [1914], Teubner, Leipzig 1907/14.

⁷ K. HEUN, Enc. math. Wiss. IV, 2, Art. 11 [1914], Teubner, Leipzig 1904/35.

⁸ C. TRUESDELL u. R. TOUPIN, Handbuch der Physik (ed. FLÜGGE) III/1, 226, Springer-Verlag, Berlin 1960.

In (2.2) bedeutet die eckige Klammer Antisymmetrisierung

$$\sigma_{[kl]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\sigma_{kl} - \sigma_{lk}), \quad (2.3)$$

wogegen runde Klammern zur Symmetrisierung verwendet werden:

$$\sigma_{(kl)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\sigma_{kl} + \sigma_{lk}). \quad (2.4)$$

Allgemein gesprochen reagiert ein Material mit Spannungen auf Veränderungen seines geometrischen Aufbaus. *Abstandsänderungen* werden durch den Dehnungstensor ε_{ij} beschrieben, wie man besonders klar aus der Definition

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (2.5)$$

ersieht, in der ds_0 den Abstand zweier benachbarter Punkte des Kontinuums *vor* und ds den der gleichen Punkte *nach* der Verformung bedeutet. Darauf antwortet bekanntlich das Kontinuum mit symmetrischen Kraftspannungen gemäß

$$\sigma_{(ij)} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.6)$$

c_{ijkl} ist der (HOOKEsche) Tensor der elastischen Moduln in der hier betrachteten linearisierten Theorie.

Die Momentenspannungen sind nun entsprechend folgender Überlegung einzuordnen: Die Dehnung kann in der gewöhnlichen Elastizitätstheorie aus einem Verschiebungsfeld u_j abgeleitet werden:

$$\varepsilon_{ij} = u_{(j,i)}. \quad (2.7)$$

Ortsveränderliche Verschiebungen führen also zu einer Dehnung des Kontinuums und damit zu Kraftspannungen. In ähnlicher Weise geben ortsveränderliche *Drehungen* ω_j zu einer *Krümmung* k_{ij} Anlaß:

$$k_{ij} = \omega_{j,i}. \quad (2.8)$$

Die Krümmung führt ihrerseits über ein hier linearisiertes Materialgesetz zu Momentenspannungen τ_{ij} :

$$\tau_{ij} = a_{ijkl} k_{kl}. \quad (2.9)$$

a_{ijkl} ist ein vierstufiger Tensor von Materialkonstanten, der sich im isotropen Fall gemäß

$$a_{ijkl} = a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + a_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (2.10)$$

durch drei unabhängige Moduln a_1 , a_2 und a_3 ausdrücken läßt.

Die verschiedenen Versuche einer Theorie der Momentenspannungen unterscheiden sich prinzipiell dadurch, wie sie die in (2.8) eingehenden Drehungen ω_j interpretieren.

§ 2.1. Nichtlokale Momentenspannungen in der klassischen Elastizitätstheorie

Der nächstliegende Gedanke ist wohl der, daß man die Geometrie der gewöhnlichen Elastizitätstheorie übernimmt. Die Drehungen ω_j sind dann aus dem Verschiebungsfeld u_j ableitbar

$$\omega_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} u_{[l,k]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} u_{l,k}, \quad (2.11)$$

so daß die Kenntnis des fundamentalen Verschiebungsfeldes auch die der Drehungen einschließt. Für die Krümmung erhalten wir dann mit (2.7), (2.8) und (2.11)

$$\kappa_{ij} = \omega_{j,i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} u_{l,ki} = \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{il,k}, \quad (2.12)$$

woraus man ersieht, daß κ_{ij} letzten Endes auch nur aus Abstandsänderungen resultiert, daher nicht als grundsätzlich neue Verformungsgröße aufgefaßt werden kann. Die Momentenspannungen ergeben sich entsprechend (2.9) als Reaktionen auf κ_{ij} .

Eine Theorie dieser Art wurde etwa gleichzeitig von AERO und KUVSHINSKII⁹ für infinitesimale und von GRIOLI¹⁰ für endliche Verformungen ausgearbeitet. Weitere Arbeiten stammen von MINDLIN und TIERSTEN¹¹ (infinitesimale Verformungen, Beispiele), TOUPIN¹² (endliche Verformungen, Wellenausbreitung) und von KOITER¹³ (Randbedingungen, Minimalprinzipien). KRÖNER³ hat gezeigt, daß die hier behandelten Momentenspannungen* in die sonst streng lokale klassische Elastizitätstheorie als Korrekturgrößen gleichsam eine gewisse *Nichtlokalität* hineinragen, welche aus der zwar sehr kleinen, aber doch endlichen *Reichweite* der atomaren Wechselwirkungskräfte resultiert.

Bereits VOIGT⁵ bewies, daß diese Momentenspannungen gegenüber den Kraftspannungen völlig zu vernachlässigen sind. Wir zitieren: ... „so sind die in den Ausdrücken für die Drehungsmomente vorkommenden Koeffizienten als unendlich klein gegen die in den Komponenten X_x ... auftretenden anzusehen“... VOIGTS Komponenten X_x ... entsprechen

⁹ E. L. AERO u. E. V. KUVSHINSKII, Soviet Phys. — Solid State **2**, 1272 [1961].

¹⁰ G. GRIOLI, Ann. Mat. Pura Appl. ser. IV, **50**, 389 [1960].

¹¹ R. D. MINDLIN u. H. F. TIERSTEN, Arch. Rational Mech. Anal. **11**, 415 [1962].

¹² R. A. TOUPIN, Arch. Rational Mech. Anal. **11**, 385 [1962].

¹³ W. T. KOITER, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. B **67**, 17 [1964].

* Allerdings treten in ³ neben den hier besprochenen Drehmomenten noch andere Momente der gleichen Stufe auf, die zu einer dehrenden Verformung Anlaß geben.

dabei unseren σ_{ij} . Zudem zeigten McCLINTOCK et al.¹⁴, daß

$$|\partial \varepsilon_{ij} / \partial x_k| \approx |\varepsilon_{mn}| / l \quad (\varepsilon_{mn} \neq 0) \quad (2.13)$$

eine notwendige Bedingung für das merkliche Auftreten von *Momentenspannungen* ist. l wird dabei als Lineardimension eines Flächenelementes interpretiert und dürfte in Metallen von der Größenordnung einiger Atomabstände sein:

$$l \approx 10 \text{ \AA}. \quad (2.14)$$

Dehnungsgradienten von der in (2.13) und (2.14) geforderten Größenordnung treten in Kristallen höchstens an irgendwelchen *singulären Stellen* auf¹⁴, im Innern also etwa an Versetzungslinien (McCLINTOCK¹⁵) und an der Oberfläche an Kerben o. Ä.. Da das Dehnungsfeld ε_{ij} einer Singularität aber zumindest mit $1/r$ abklingen muß, folgt aus (2.13)

$$r \lesssim l, \quad (2.15)$$

d. h. Momentenspannungen sind merklich erst in Bereichen vorhanden, in denen normalerweise nicht nur die Anwendung der linearen, sondern auch der nichtlinearen Elastizitätstheorie nicht mehr sinnvoll ist.

Im Zusammenhang mit dynamischen Problemen, die in dieser Arbeit nicht behandelt werden, mag jedoch eventuell bei sehr *kurzen Wellen* die Bedingung (2.13) im Gültigkeitsbereich der Elastizitätstheorie zum Tragen kommen. Wir verweisen hier auf eine Notiz von KRUMHANS¹⁶.

Zusammenfassend kann man daher sagen, daß die Momentenspannungen im Rahmen der klassischen Elastostatik gegenüber den Kraftspannungen ihrem Wesen nach eine Größenordnung kleiner sind und deshalb *vernachlässigt* werden können. Dies gilt allerdings nicht bei Problemen, in denen Längen auftreten, die mit l vergleichbar sind, wie etwa der Abstand zweier sehr benachbarter Versetzungen o. Ä..

§ 2.2. Momentenspannungen im inkompatiblen Cosserat-Kontinuum

Nun kann man aber die Drehungen in (2.8) auch noch anders interpretieren. Die Gebrüder COSSERAT¹⁷ haben bereits um die Jahrhundertwende die Theorie eines Kontinuums entwickelt, dessen Bausteine nicht nur verschoben, sondern unabhängig davon auch verdreht werden können. Die Verformung eines solchen „COSSERAT-Kontinuums“, das in moderner Weise bei ERICKSEN und TRUESDELL¹⁸ und GÜNTHER¹⁹ beschrieben ist, wird also durch ein Verschiebungsfeld u_j mit seinen 3 funktionalen Freiheitsgraden und durch ein Drehfeld ϑ_j mit ebensovielen Freiheitsgraden dargestellt. Die COSSERATSche Krümmung

$$K_{ij} = \vartheta_{j,i} \quad (2.16)$$

ist hier ersichtlich unabhängig von der Dehnung ε_{ij} und demgemäß eine echte neue Verformungsgröße. Als Reaktion gegen K_{ij} treten natürlich wieder Momentenspannungen τ_{ij} auf, welche — im Gegensatz zu den oben besprochenen Momentenspannungen — zu der Verformungsenergie im allgemeinen einen Beitrag der gleichen Größenordnung wie die Kraftspannungen $\sigma_{(ij)}$ beisteuern.

Die explizite Form der Materialgesetze eines hypothetischen COSSERATSchen Kontinuums wurde von KOSTER²⁰, OSHIMA²¹, SCHAEFER²², COWIN²³, KUVSHINSKII und AERO²⁴ sowie DJURITCH²⁵ untersucht. Diese Betrachtungen sind von besonderem physikalischen Interesse, seit GÜNTHER¹⁹ erkannt hat, daß die Feldtheorie der Versetzungen mit einem geometrischen Modell arbeitet, das als verallgemeinertes, nämlich *inkompatibles* COSSERAT-Kontinuum aufzufassen ist; die in diesem auftretenden Strukturkrümmungen K_{ij} lassen sich nach NYE¹ gemäß Gl. (1.2) in die Versetzungsdichte α_{ij} umrechnen. Man vergleiche hierzu die zusammenfassende Darstellung²⁶, wo auch historische Bemerkungen zu finden sind.

Das Materialgesetz (2.9) der Feldtheorie der Versetzungen, das einer konkreten physikalischen Situa-

¹⁴ F. A. McCLINTOCK, P. A. ANDRE, K. R. SCHWERDT u. R. E. STOECKLY, *Nature*, Lond. **182**, 652 [1958].

¹⁵ F. A. McCLINTOCK, *Acta Met.* **8**, 127 [1960].

¹⁶ J. A. KRUMHANS, *Solid State Comm.* **1**, 198 [1963].

¹⁷ E. COSSERAT u. F. COSSERAT, *Théorie des Corps Déformables*, Hermann et Fils, Paris 1909.

¹⁸ J. L. ERICKSEN u. C. TRUESDELL, *Arch. Rational Mech. Anal.* **1**, 295 [1958].

¹⁹ W. GÜNTHER, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* **10**, 195 [1958].

²⁰ W. KOSTER, *Dissertation* Utrecht 1920.

²¹ N. OSHIMA, *Proc. 3rd Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, p. 77 [1953]; *Memoirs of the Unifying Study of the Basic*

Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry I, 563, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, Tokio 1955.

²² H. SCHAEFER, *Miszellaneen Angew. Mech. (Tollmien-Festschrift)*, p. 277 [1962].

²³ S. C. COWIN, *Diss. Abstr.* **23**, 3848 [1963].

²⁴ R. V. KUVSHINSKII u. E. L. AERO, *Soviet Phys.—Solid State* **5**, 1892 [1964].

²⁵ S. DJURITCH, *Dissertation* Belgrad 1964.

²⁶ E. KRÖNER in SOMMERFELD, *Vorlesung über Theoretische Physik*, 5. Auflage, Band 2, Kapitel 9, Akad. Verlagsges., Leipzig 1964.

tion Ausdruck verleiht und welches die Momentenspannungen aus den Strukturkrümmungen zu errechnen gestattet, wurde von KRÖNER³ behandelt; er bestimmte dabei provisorisch die von makroskopisch homogenen Stufenversetzungsverteilungen verursachten Momentenspannungen. Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterführung davon dar.

Das 3-dimensionale COSSERAT-Kontinuum wird unseres Wissens sonst nur noch in der *Rheologie* verwendet. Für dieses Gebiet verweisen wir auf die Arbeiten von OSHIMA²¹ („gekörntes“ Medium), ERICKSEN²⁷ („anisotrope“ Flüssigkeit) und auf den zusammenfassenden Artikel von DAHLER und SCRIVEN²⁸ („strukturiertes“ Kontinuum).

§ 3. Momentenspannungen makroskopisch homogener Versetzungsverteilungen ohne Berücksichtigung des Versetzungszentrums

Abb. 4 zeigt eine makroskopisch homogene Verteilung von Schraubenversetzungen. Die Versetzungslinien sind parallel zur z -Achse und besitzen die Koordinaten $[(m + \frac{1}{2})X, (n + \frac{1}{2})Y]$ mit $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Der BURGERS-Vektor, der in z -Richtung weist, habe den Betrag b . In Abb. 5 sind die entsprechenden Verhältnisse für Stufenversetzungen dargestellt.

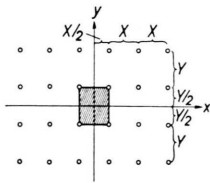


Abb. 4. Makroskopisch homogene Schraubenversetzungsverteilung.

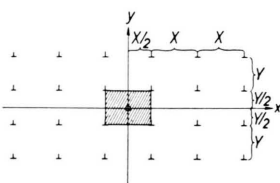


Abb. 5. Makroskopisch homogene Stufenversetzungsverteilung (vgl. Abb. 3 c).

Bezeichnen wir mit $\sigma_{ij}[x, y]$ das Spannungsfeld einer in der z -Achse verlaufenden Versetzung, so erhalten wir durch

$$\sigma_{ij}^{\text{ges}} = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{ij}[x - (m + \frac{1}{2})X, y - (n + \frac{1}{2})Y] \quad (3.1)$$

das Gesamtspannungsfeld der entsprechenden Versetzungsanordnung. Es ist in X und Y periodisch, weshalb die makroskopischen Kraftspannungen $\bar{\sigma}_{ij}$,

die durch Mitteln über ein „größeres“ Flächenelement ΔV_i erhalten werden, verschwinden.

Mit einem Querstrich werden wir weiterhin alle makroskopischen Größen versehen, die durch Mitteln aus mikroskopisch fluktuierenden Größen entstehen. Das Flächenelement, über das gemittelt wird, muß einerseits von vielen Versetzungen durchstoßen werden, andererseits aber klein gegen die äußeren Abmessungen der Probe sein. Dann wird der Fehler unerheblich, den man macht, wenn man nachher ΔF_i durch das Differential dF_i ersetzt.

Der Wirkung der *oszillierenden und im Mittel verschwindenden Mikrospannungen* σ_{ij}^{ges} kann man weitgehend dadurch Rechnung tragen, daß man die gemittelten *Momente* berechnet, welche die Kraftspannungen σ_{ij}^{ges} auf eine makroskopische Schnittfläche ausüben. Diese Momente können durch einen Tensor 3. Stufe

$$\bar{\sigma}_{ijk} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} dV \sigma_{ij}^{\text{ges}} \xi_k \quad (3.2)$$

beschrieben werden³. Aus dem Gedankenversuch in der Einleitung entnimmt man, daß der Integrationsbereich bei unseren homogenen Versetzungsverteilungen in Abb. 4 und 5 folgendermaßen gewählt werden kann:

$$\left\{ \begin{array}{l} -X/2 \leq x_1 \leq +X/2 \\ -Y/2 \leq x_2 \leq +Y/2 \\ -1/2 \leq x_3 \leq +1/2 \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

Den Ortsvektor ξ_k können wir von einem beliebigen Punkt, beispielsweise vom Ursprung aus, messen, da er wegen des Verschwindens der gemittelten Mikrospannungen frei wählbar ist:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ijk} &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} dV \sigma_{ij}^{\text{ges}} (\xi_k + c_k) \\ &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} dV \sigma_{ij}^{\text{ges}} \xi_k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Um aus dem 3-stufigen Tensor $\bar{\sigma}_{ijk}$ einen 2-stufigen Momentenspannungstensor $\bar{\tau}_{ij}$ abzuleiten, betrachten wir Abb. 6. An einer Schnittfläche $x_2 = \text{const}$ sind hier die Kraftspannungen σ_{21} und σ_{23} mit den Hebelarmen ξ_3 bzw. ξ_1 eingezeichnet. Abstrahieren wir von dem in Abb. 6 dargestellten Spezialfall, dann stellen wir fest, daß die an der i -Ebene angreifenden Momente $\sigma_{ij} \xi_k$ und $\sigma_{ik} \xi_j$ im Falle $j \neq k$, wenn man sie als Vektoren betrachtet, beide auf der jk -Ebene

²⁷ J. L. ERICKSEN, Trans. Soc. Rheol. 4, 29 [1960]; Kolloid-Z. 173, 117 [1960]; Trans. Soc. Rheol. 6, 275 [1962].

²⁸ J. S. DAHLER u. L. E. SCRIVEN, Proc. Roy. Soc., Lond. A 275, 504 [1963].

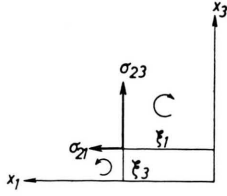


Abb. 6. Zur Ableitung der Gl. (3.8): Blick auf eine Ebene $x_2 = \text{const.}$

senkrecht stehen und dabei entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Daher stellt

$$\bar{\sigma}_{ijk} - \bar{\sigma}_{ikj} \quad (3.5)$$

die Momentenspannungskomponenten dar, die Momente der i -Ebene beschreiben, welche um die zur jk -Ebene senkrechte Richtung drehen; wir wollen sie mit $\bar{\tau}_{ijk}$ bezeichnen:

$$\bar{\tau}_{ijk} = \bar{\tau}_{i[jk]} = \bar{\sigma}_{ijk} - \bar{\sigma}_{ikj} = 2 \bar{\sigma}_{i[jk]}. \quad (3.6)$$

Geht man von $\bar{\tau}_{ijk}$ zum dazu dualen Tensor $\bar{\tau}_{ij}$ über, so erhält man

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \bar{\tau}_{ikl} \quad (3.7)$$

oder endgültig mit (3.6)

$$\bar{\tau}_{ij} = \epsilon_{jkl} \bar{\sigma}_{ikl} = \epsilon_{jkl} \bar{\sigma}_{i[kl]}. \quad (3.8)$$

Der Momentenspannungstensor $\bar{\tau}_{ij}$ beschreibt also entsprechend (3.7) und (3.8) die Drehmomente um die j -Achse, die durch die i -Ebene hindurchgreifen, in Übereinstimmung mit der Definition (1.3).

In den Ausdruck (3.8) für $\bar{\tau}_{ij}$ geht nur $\bar{\sigma}_{i[kl]}$ ein. Weiter unten in (3.16) und (3.35) werden wir aber sehen, daß sich $\bar{\sigma}_{i(kl)}$ wegen des Verschwindens einiger $\bar{\sigma}_{ikl}$ -Komponenten bei den Versetzungsverteilungen der Abb. 4 und 5 in den $\bar{\tau}_{ij}$ ausdrücken läßt. Demnach steckt in $\bar{\tau}_{ij}$ im Falle der Versetzungstheorie noch die gleiche physikalische Information, wie in $\bar{\sigma}_{ikl}$. Der tiefere Grund für diese Tatsache ist der, daß Versetzungen gemäß (1.2) durch Krümmungen realisiert werden. Krümmungen werden aber als Gradienten von Drehungen auch *Dreh*-Momente $\bar{\sigma}_{i[kl]}$ induzieren und keine Momente $\bar{\sigma}_{i(kl)}$, die, wie man am Beispiel $\sigma_{21} \xi_1$ in Abb. 6 sieht, einer dehnenden Beanspruchung zugeordnet sind.

Wie wir in § 4 noch sehen werden, muß man jeder Versetzung in ihrem Zentrum einen asymmetrischen Spannungstensor zuordnen. Diese Tatsache wollen wir ab jetzt im ganzen § 3 außer acht lassen, d. h. wir arbeiten mit einem ausnahmslos symmetrischen Spannungstensor. Berechnet man dann aus (3.8) die *Spur* des Momentenspannungstensors $\bar{\tau}_{ij}$, so ergibt

sich wegen

$$\sigma_{[ik]l} = 0, \quad (3.9)$$

$$\bar{\tau}_{ii} = \epsilon_{ikl} \bar{\sigma}_{ikl} = \epsilon_{ikl} \bar{\sigma}_{[ik]l} = 0. \quad (3.10)$$

§ 3.1. Momentenspannungen der Abb. 4 (Schraubenversetzungen)

Behandelt man die Versetzungen mit den Methoden der linearen Elastostatik²⁶, so erhält man für eine in der z -Achse verlaufende Schraubenversetzung das Kraftspannungsfeld

$$\sigma_{13}[x, y] = \sigma_{31}[x, y] = + \frac{Gb}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (3.11)$$

$$\sigma_{23}[x, y] = \sigma_{32}[x, y] = - \frac{Gb}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (3.12)$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. G ist der Schubmodul, b der Betrag des BURGERS-Vektors.

Entsprechend (3.2), (3.11) und (3.12) können also höchstens die 12 Momentenspannungskomponenten

$$\bar{\sigma}_{13i} = \bar{\sigma}_{31i}, \quad \bar{\sigma}_{23i} = \bar{\sigma}_{32i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.13)$$

ungleich Null sein. Zerlegt man einen Körper durch eine beliebige Fläche F in zwei Teile, so gilt für Eigenspannungen der Satz von ALBENGA²⁹

$$\int_F \sigma_{ij} dF_i = 0. \quad (3.14)$$

Mit dessen Hilfe kann man leicht zeigen, daß die 8 Momentenspannungskomponenten

$$\bar{\sigma}_{131} = \bar{\sigma}_{311} = \bar{\sigma}_{133} = \bar{\sigma}_{313} = \bar{\sigma}_{232} = \bar{\sigma}_{322} = \bar{\sigma}_{233} = \bar{\sigma}_{323} = 0 \quad (3.15)$$

sind, so daß von (3.13) höchstens

$$\bar{\sigma}_{132} = \bar{\sigma}_{312} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{231} = \bar{\sigma}_{321} \quad (3.16)$$

ungleich Null sind.

Gehen wir gemäß (3.8) zu $\bar{\tau}_{ij}$ über, so ergeben sich folgende nichtverschwindende Komponenten:

$$\bar{\tau}_{11} = \epsilon_{1kl} \bar{\sigma}_{1kl} = -\bar{\sigma}_{132}, \quad (3.17)$$

$$\bar{\tau}_{22} = \epsilon_{2kl} \bar{\sigma}_{2kl} = +\bar{\sigma}_{231}, \quad (3.18)$$

$$\bar{\tau}_{33} = \epsilon_{3kl} \bar{\sigma}_{3kl} = +\bar{\sigma}_{312} - \bar{\sigma}_{321} = -\bar{\tau}_{11} - \bar{\tau}_{22}. \quad (3.19)$$

Die Versetzungsdichte ist bekanntlich¹ durch

$$\Delta b_j = \bar{a}_{ij} \Delta F_i \quad (3.20)$$

definiert. Δb_j ist dabei der Gesamt-BURGERS-Vektor der Versetzungen, welche ein beliebig orientiertes

²⁹ G. ALBENGA, Atti Accad. Sci. Torino, Classe Sci. Fis. Mat. Nat. **54**, 864 [1918/19].

Flächenelement ΔF_i durchstoßen. In Abb. 4 ist daher nur die Komponente \bar{a}_{33} der Versetzungsdichte von Null verschieden. Da im Mittel auf eine Fläche der Größe $X Y$ eine Versetzung kommt, ist

$$\bar{a}_{33} = b/X Y. \quad (3.21)$$

Berücksichtigt man (3.17)–(3.19), (3.2), (3.1), (3.11), (3.12) und (3.21), so erhält man nach einfacher Rechnung für die Abb. 4 die Momentenspannungen

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{a}_{33} \frac{G}{12} \begin{pmatrix} F(Y, X) & 0 & 0 \\ 0 & F(X, Y) & 0 \\ 0 & 0 & -F(Y, X) - F(X, Y) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

mit

$$F(Y, X) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{6}{\pi} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \int_{-X/2}^{+X/2} dx \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \times \frac{y[y - (n + \frac{1}{2})Y]}{[x - (m + \frac{1}{2})X]^2 + [y - (n + \frac{1}{2})Y]^2}. \quad (3.23)$$

Auf die Berechnung von $F(Y, X)$ kommen wir später zurück.

§ 3.2. Momentenspannungen der Abb. 5 (Stufenversetzungen)

Die Momentenspannungen der Versetzungsanordnung der Abb. 5 sind schon näherungsweise für $Y/X \ll 1$ bestimmt worden³. Hier wird eine exakte Lösung angegeben.

Der Kristall in Abb. 5 soll makroskopisch nicht verzerrt sein ($\bar{\epsilon}_{ij} = 0$). Daher müssen wir auf den Ebenen $z = +\infty$ und $z = -\infty$ Randkräfte p_3 von geeigneter Größe angreifen lassen, die eine Querkontraktion in z -Richtung verhindern. Aus den Randbedingungen $p_j = \sigma_{ij} n_i$ ergibt sich

$$p_3(z = \pm \infty) = \pm \sigma_{33}^{\text{ges}}, \quad (3.24)$$

während für σ_{33}^{ges} seinerseits nach der Theorie vom ebenen *Dehnungs*-Zustand folgendes gilt:

$$\sigma_{33}^{\text{ges}} = \nu(\sigma_{11}^{\text{ges}} + \sigma_{22}^{\text{ges}}); \quad (3.25)$$

ν ist dabei die Poisson-Zahl. Hervorzuheben ist, daß die den mikroskopischen Randspannungen p_3 entsprechenden makroskopischen Größen \bar{p}_3 wegen $\bar{\epsilon}_{ij} = 0$ verschwinden:

$$\begin{aligned} \bar{p}_3(z = \pm \infty) &= \pm \bar{\sigma}_{33}^{\text{ges}} = \\ &= \pm \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{+X/2} dx \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \sigma_{33}^{\text{ges}} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die lineare Elastostatik liefert für das Spannungsfeld einer in der z -Achse verlaufenden Stufenver-

setzung bei den eben besprochenen Randbedingungen²⁶

$$\sigma_{11}[x, y] = +A \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (3.27)$$

$$\sigma_{12}[x, y] = \sigma_{21}[x, y] = -A \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{22}[x, y] = +A \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (3.29)$$

$$\sigma_{33}[x, y] = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 2\nu A \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.30)$$

mit

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{2\pi} \frac{G}{1-\nu}.$$

b ist wieder der Betrag des BURGERS-Vektors. Alle anderen σ_{ij} verschwinden.

Für die Momentenspannungen gilt

$$\bar{\sigma}_{13i} = \bar{\sigma}_{31i} = \bar{\sigma}_{23i} = \bar{\sigma}_{32i} = 0, \quad (3.31)$$

da die zugehörigen Komponenten des Spannungstensors gleich Null sind. Wendet man wiederum den ALBENGASCHEN Satz (3.14) an und beachtet (3.26), so kann man das Verschwinden folgender 11 Komponenten beweisen:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{111} = \bar{\sigma}_{113} = \bar{\sigma}_{121} = \bar{\sigma}_{122} = \bar{\sigma}_{123} = \bar{\sigma}_{211} \\ = \bar{\sigma}_{212} = \bar{\sigma}_{213} = \bar{\sigma}_{222} = \bar{\sigma}_{223} = \bar{\sigma}_{333} = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vertauscht man im Integranden der Komponente $\bar{\sigma}_{122}$ die Integrationsvariablen x und y , so ergibt sich wegen (3.32)

$$\bar{\sigma}_{221} = 0. \quad (3.33)$$

Daraus erhält man mit (3.2), (3.25) und (3.32)

$$\bar{\sigma}_{331} = \nu(\bar{\sigma}_{111} + \bar{\sigma}_{221}) = 0. \quad (3.34)$$

Daher bleiben gemäß (3.31) – (3.34) nur die Komponenten

$$\bar{\sigma}_{112} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{332} \quad (3.35)$$

übrig, und es ergeben sich aus (3.8) höchstens folgende nichtverschwindende $\bar{\tau}_{ij}$:

$$\bar{\tau}_{13} = \epsilon_{3kl} \bar{\sigma}_{1kl} = +\bar{\sigma}_{112}, \quad (3.36)$$

$$\bar{\tau}_{31} = \epsilon_{1kl} \bar{\sigma}_{3kl} = -\bar{\sigma}_{332}. \quad (3.37)$$

Wegen (3.25) läßt sich noch ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen den beiden Komponenten $\bar{\tau}_{13}$ und $\bar{\tau}_{31}$ angeben. Aus (3.37) resultiert mit (3.2), (3.25), (3.32) und (3.36)

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{31} &= -\bar{\sigma}_{332} = -\nu(\bar{\sigma}_{112} + \bar{\sigma}_{222}) \\ &= -\nu \bar{\sigma}_{112} = -\nu \bar{\tau}_{13}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die einzige nichtverschwindende Komponente der Versetzungsdichte in Abb. 5 ist

$$\bar{a}_{31} = b/X Y. \quad (3.39)$$

Damit erhält man aus (3.38), (3.2), (3.1), (3.30) und (3.39) für die Abb. 5 die Momentenspannungen

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{a}_{31} \frac{G}{6(1-\nu)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -F(Y, X) \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu F(Y, X) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

$F(Y, X)$ ist wiederum die in (3.23) definierte Funktion. Wir sehen also, daß die Momentenspannungen der Abb. 4 und 5 mit der gleichen Funktion berechnet werden können, ein Ergebnis, das letzten Endes aus der Bedingung $\bar{\tau}_{ii} = 0$ und damit aus der Symmetrie des Spannungstensors resultiert.

§ 3.3. Zusammenstellung der Momentenspannungen der Abb. 4 und 5

Die explizite Berechnung von $F(Y, X)$, die vor allem wegen der auftretenden Doppelsumme keineswegs trivial ist, kann, wie wir weiter unten sehen werden, durch einen Trick umgangen werden. (3.60) liefert dann

$$F(Y, X) = +Y^2. \quad (3.41)$$

Setzt man dies in (3.22) und (3.40) ein, so erhält man für die Momentenspannungen der Abb. 4

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{a}_{33} \frac{G}{12} \begin{pmatrix} Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & X^2 & 0 \\ 0 & 0 & -Y^2 - X^2 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

und für die der Abb. 5

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{a}_{31} \frac{G}{6(1-\nu)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu Y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich daraus die Momentenspannungen aller homogenen Versetzungsverteilungen, bei denen wie in Abb. 4 und 5 der BURGERS-Vektor und die Linienrichtung der Einzelversetzung parallel zu den Koordinatenachsen laufen.

Aus (3.42) und (3.43) liest man in Übereinstimmung mit (3.10) ab, daß die Spur des Momentenspannungstensors stets verschwindet. $\bar{\tau}_{ij}$ ist daher ein *Deviator*, den wir durch ein hochgestelltes D abkürzen wollen:

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{\tau}_{ij}^D + \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{\tau}_{kk} = \bar{\tau}_{ij}^D. \quad (3.44)$$

(3.42) und (3.43) lassen sich nun bei jeweils geeignet gewählten Konstanten b_1, b_2, b_3 in der Form

$$\bar{\tau}_{ij}^* = b_1 \delta_{ij} \bar{a}_{kk} + b_2 \bar{a}_{ij} + b_3 \bar{a}_{ji} \quad (3.45)$$

darstellen, wobei der Stern über dem Gleichheitszeichen bedeutet, daß die Gleichung nur im x_i -Koordinatensystem gilt. Bildet man auf beiden Seiten von (3.45) den Deviator und berücksichtigt (3.44), so ergibt sich

$$\bar{\tau}_{ij}^* = b_2 \bar{a}_{ij}^D + b_3 \bar{a}_{ji}^D. \quad (3.46)$$

Nach dieser Gleichung kann man sich sämtliche Momentenspannungszustände, falls man, wie oben betont, das Versetzungszentrum außer acht läßt, durch deviatorische Versetzungsdichten \bar{a}_{ij}^D , also durch *Stufen-Versetzungen* hervorgerufen denken. Demgemäß ist (3.42) implizit in (3.43) enthalten!

In der Feldtheorie der Versetzungen erscheinen die Diagonalkomponenten des Versetzungstensors \bar{a}_{ij} als Schraubenversetzungen, die übrigen Komponenten als Stufenversetzungen. Dies ist indessen keine invariante Zerlegung: Transformiert man z. B. eine Versetzungsdichte

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch eine Drehung von 45° um die z -Achse, so erhält man ein Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. im neuen Koordinatensystem erscheinen die ursprünglichen Schraubenversetzungen als Stufenversetzungen. Invariant ist dagegen die Spur von \bar{a}_{ij} , die drei zueinander senkrechte Scharen von Schraubenversetzungen gleicher Dichte beschreibt. Man vergleiche die entsprechenden Verhältnisse beim Dehnungstensor $\bar{\epsilon}_{ij}$.

§ 3.4. Beziehungen zum 2-dimensionalen Cosserat-Kontinuum

Wir rücken die Stufenversetzungen der Abb. 5 bei konstantem Y in x -Richtung immer näher zusammen und verkleinern dabei ihren BURGERS-Vektor b so, daß die Größe der makroskopischen Versetzungsdichte

$$\bar{a}_{31} = \frac{b}{X Y} = \frac{b}{X} \cdot \frac{1}{Y} = \frac{\bar{b}}{Y} \quad (3.47)$$

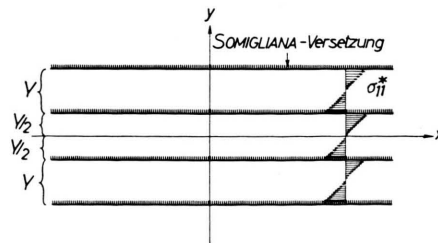


Abb. 7. Grenzübergang zu einer SOMIGLIANA-Versetzung ^{32, 33} (vgl. Abb. 2 c).

erhalten bleibt. Führen wir den entsprechenden Grenzübergang durch, so erhalten wir für den infinitesimalen BURGERS-Vektor db jeder Versetzung

$$db/dx = b/X = \bar{b}. \quad (3.48)$$

In den Flächen $y = (n + \frac{1}{2})Y$ ist nun jeweils eine sog. SOMIGLIANA-Versetzung (Abb. 7) mit einem in x -Richtung linear wachsenden Verschiebungssprung

$$[u_1] = (b/X) x + \text{const} \quad (3.49)$$

entstanden; die eckige Klammer soll dabei als Abkürzung für „Sprung“ stehen.

Aus der Literatur ist zur Genüge bekannt (MASING und POLANYI³⁰, MANN³¹, NYE³² und INDENBOM³³), daß die zwischen den (instabilen) SOMIGLIANA-Versetzungen liegenden ungestörten Materialstücke in Abb. 7 einer elastischen Verformung unterliegen, die der reinen *Biegung* dieser „Platten“ entspricht. Bei behinderter Querkontraktion in z -Richtung gemäß (3.25) ergibt sich deshalb für die Platte $-Y/2 < y < +Y/2$ (vgl. z. B. TIMOSHENKO und GOODIER³⁴)

$$\sigma_{11}^* = \frac{b}{XY} \frac{2G}{(1-\nu)} y, \quad \sigma_{33}^* = \nu \sigma_{11}^* \quad (3.50), (3.51)$$

und mit dem HOOKESchen Gesetz

$$\varepsilon_{11}^* = \frac{b}{XY} y, \quad \varepsilon_{22}^* = -\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^*. \quad (3.52), (3.53)$$

Die Konstanten in (3.50) wurden dabei so angepaßt, daß die sich aus (3.52) ergebende Verschiebung

$$u_1^* = \frac{b}{XY} xy \quad (3.54)$$

gerade den durch (3.49) geforderten Verschiebungssprung beschreibt; dann erhält unsere Platte eine elastische Krümmung b/XY , die betragsmäßig mit der Strukturkrümmung \bar{K}_{13} der Abb. 5 übereinstimmt.

Daher ist der Gedanke naheliegend, daß die *Versetzungsanordnungen der Abb. 5 und 7*, falls man den Beitrag des Versetzungszentrums wie bisher außer acht läßt, bezüglich der Momentenspannungen *äquivalent* sind.

Beweis: Für die Versetzungen der Abb. 5 ist die Komponente $\bar{\tau}_{13}$ nach (3.1), (3.2) und (3.36) folgendermaßen definiert:

$$\bar{\tau}_{13} = \bar{\sigma}_{112} = \frac{1}{XY} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \int_{-X/2}^{+X/2} dx \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \times \sigma_{11}[x - (m + \frac{1}{2})X, y - (n + \frac{1}{2})Y] y. \quad (3.55)$$

Um die Größe m , über die summiert wird, aus dem Integranden zu entfernen, verschieben wir die Integrationsgrenzen von x :

$$\bar{\tau}_{13} = \frac{1}{XY} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \int_{-(m+1)X}^{-mX} dx \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \times \sigma_{11}[x, y - (n + \frac{1}{2})Y] y. \quad (3.56)$$

Damit ist die Summe über m elementar auswertbar:

$$\bar{\tau}_{13} = \frac{1}{XY} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-Y/2}^{+Y/2} dx \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \times \sigma_{11}[x, y - (n + \frac{1}{2})Y] y. \quad (3.57)$$

Andererseits sieht man aber leicht ein, daß (3.57) auch ein Ausdruck für die Momentenspannungen der Abb. 7 ist. Jede infinitesimale Versetzung mit der Abszisse x und der Ordinate $(n + \frac{1}{2})Y$ ruft an der Fläche $x = 0$ bezüglich des Ursprungs ein Moment

$$db \cdot (1/b) \cdot \sigma_{11}[-x, y - (n + \frac{1}{2})Y] \cdot y \quad (3.58)$$

hervor. Mitteln wir dieses Moment über y von $-Y/2$ bis $+Y/2$ und summieren bzw. integrieren über alle Versetzungen auf, so ergibt sich wegen (3.48) die Gl. (3.57).

$\bar{\tau}_{13}$ läßt sich in der nämlichen Weise umformen. Da, wie wir aus (3.50) und (3.51) ersehen, in Abb. 7 keine weiteren Momentenspannungen auftreten, ist die obige Behauptung bewiesen.

Jetzt läßt sich die in (3.23) definierte Funktion $F(Y, X)$ leicht bestimmen. Die *Momentenspannung* $\bar{\tau}_{13}$ ist ersichtlich das auf die Einheit der Querschnittsfläche bezogene negative *Biegemoment* M_3

$$\bar{\tau}_{13} = -\frac{M_3}{YZ} = -\frac{1}{Y} \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \sigma_{11}^* \cdot y. \quad (3.59)$$

Setzt man (3.50) ein und beachtet (3.47), so ergibt ein Vergleich mit (3.40)

$$F(Y, X) = Y^2, \quad (3.60)$$

was uns zeigt, daß $F(Y, X)$ überhaupt nicht von X abhängt.

Die mittlere *Energiedichte* der Platten in Abb. 7 bestimmt sich gemäß

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Y} \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \sigma_{11}^* \varepsilon_{11}^*, \quad (3.61)$$

was sich mit (3.52), (3.59) und (1.2) mit (3.39) zu

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{XY} \cdot \frac{1}{Y} \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \sigma_{11}^* y = \frac{1}{2} \bar{K}_{13} \bar{\tau}_{13} \quad (3.62)$$

³⁰ G. MASING u. M. POLANYI, *Ergeb. exakt. Naturw.* **2**, 177 [1923].

³¹ E. H. MANN, *Proc. Roy. Soc., Lond. A* **199**, 376 [1949].

³² J. F. NYE, *Proc. Roy. Soc., Lond. A* **200**, 47 [1949].

³³ V. L. INDENBOM, *Plasticity of Crystals* (ed. Klassen-Neklyudova) Consultants Bureau, New York 1962, p. 105.

³⁴ S. TIMOSHENKO u. J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York 1951.

umrechnen läßt. Die der Strukturkrümmung \bar{K}_{ij} zugeordnete Energiedichte ergibt sich daher bei Stufenversetzungen entsprechend der Formel

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \bar{\tau}_{ij} \bar{K}_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \bar{K}_{ij} \bar{K}_{kl}. \quad (3.63)$$

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind durchaus nicht unerwartet, denn die Versetzungsanordnung der Abb. 5 stellt makroskopisch gesehen einen Krümmungszustand \bar{K}_{13} dar, der kompatibel²⁶ und daher aus einem Drehfeld ableitbar ist. Insofern ist die Figur in Abb. 5 die Verifikation eines COSSERAT-Kontinuums. Eine als 2-dimensional betrachtete Platte kann aber ebenfalls als COSSERAT-Kontinuum aufgefaßt werden¹⁷⁻¹⁹, so daß der 3-dimensionale COSSERAT-Zustand der Abb. 5 aus 2-dimensionalen COSSERAT-Zuständen aufgebaut gedacht werden kann.

Zugleich sehen wir, daß der statische Zustand des versetzten Kontinuums in Abb. 5 um so besser durch die bisherigen Momentenspannungen 1. Ordnung allein beschrieben wird, je mehr sich die Materialstücke zwischen den Gleitebenen wie gebogene Platten verhalten, je näher sich also die Versetzungen in x -Richtung bei vorgegebenem Y sind:

$$X/Y \ll 1. \quad (3.64)$$

Gilt diese Beziehung nicht, so haben wir auch noch Momentenspannungen *höherer Ordnung* in Rechnung zu stellen³. Da man allgemein beweisen kann, daß in Abb. 4 und 5 sämtliche Momentenspannungen geradzahligter Ordnung verschwinden, wären zuerst die Momentenspannungen 3. Ordnung zu berücksichtigen.

Rückblickend erkennt man nun auch die Beziehung dieses Abschnittes zu unserem Gedankenversuch in der Einleitung. Die bisherigen rein elastizitätstheoretischen Berechnungen der Momentenspannungen gemäß (3.2) und (3.8) liefen uns nur das in Abb. 2 c auftretende Biegemoment M_3 , da wir, wie ausdrücklich vermerkt wurde, das Versetzungszentrum außer acht ließen. Ziehen wir auch diese in Betracht, was in § 4 geschehen soll, so erhalten wir zusätzlich das vom kristallinen Aufbau der verschweißten Platten verursachte Moment M_3^p (vgl. Abb. 3 b und 3 c).

Mit Hilfe der Resultate dieses Abschnittes kann man leicht erkennen, wie groß die Momentenspannungen von Versetzungsverteilungen sind, die *nicht so regel-*

mäßig wie in Abb. 5 angeordnet sind. Verschieben wir z. B. in Abb. 5 jede zweite Zeile von Versetzungen um $X/2$ nach rechts, so werden sich die Momentenspannungen *nicht* ändern; die Mittelung in y -Richtung müssen wir dann allerdings von $-Y/2$ bis $3Y/2$ erstrecken. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man nachprüfen, indem man die von (3.55) zu (3.57) führende Schlußweise benutzt, anschaulich verständlich ist sie deshalb, weil beim Übergang zu SOMIGLIANA-Versetzungen die ursprüngliche Abszisse der periodisch angeordneten Einzelversetzungen natürlich unwesentlich ist. Auf diese Weise sieht man ein, daß sich auch bei statistischer Verteilung der \bar{a}_{31} -Versetzungen, sofern Y der mittlere Gleitebenenabstand ist, die nämlichen Momentenspannungen 1. Ordnung ergeben werden. Man hat höchstens Differenzen bei den höheren Momenten zu erwarten.

§ 4. Beitrag des Versetzungszentrums zu den Momentenspannungen

Im elastizitätstheoretischen Modell der Versetzung divergieren im Zentrum die Spannungen, was natürlich nicht der Wirklichkeit entspricht. Um das Zentrum wenigstens einigermaßen zu erfassen, kann man das die Gitterstruktur berücksichtigende Versetzungsmodell von PEIERLS⁴ verwenden, dessen Beschreibung man z. B. in den Arbeiten von NABARRO^{35, 36}, COTTRELL³⁷ und SEEGER³⁸ findet.

Ganz im Sinne dieses Modells behandeln wir die zwischen den SOMIGLIANA-Versetzungen der Abb. 7 liegenden gebogenen Platten elastizitätstheoretisch, woraus dann, wie wir schon in der Einleitung sahen, ein Sprung in der Gitterkonstanten in y -Richtung jeweils bei den SOMIGLIANA-Versetzungen auftritt. Dann „schalten“ wir plötzlich die deswegen gleichsam zwischen den Oberflächen der Platten wirkende Kohäsionskraft, die dem nichtlinearen PEIERLSSchen Sinusgesetz⁴ gehorchen soll, ein. Das Kontinuum geht darauf in den Zustand der geringst möglichen Energie über, nämlich, wie VAN DER MERWE³⁹ ausführlich durchgerechnet hat, in den versetzten der Abb. 5. An sich hat VAN DER MERWE dieses Problem für zwei (kubisch primitive) *Halb*-Kristalle mit verschiedenen Gitterkonstanten diskutiert. Wir können aber seine Ergebnisse sicherlich für den Fall (3.64) $X/Y \ll 1$ übernehmen, da dann, wie wir in § 3.4 sahen, die Näherung „gebogene Platten“ sinnvoll ist.

³⁵ F. R. N. NABARRO, Proc. Phys. Soc., Lond. **59**, 256 [1947].

³⁶ F. R. N. NABARRO, Adv. Phys. (Phil. Mag. Suppl.) **1**, 269 [1952].

³⁷ A. H. COTTRELL, Dislocations and Plastic Flow in Crystals. Clarendon Press, Oxford 1953.

³⁸ A. SEEGER, Handbuch der Physik (ed. Flügge) VII/1, 383, Springer-Verlag, Berlin 1955.

³⁹ J. H. VAN DER MERWE, Proc. Phys. Soc., Lond. **63**, 616 [1950].

§ 4.1. Energie

Die Energie pro Versetzung des Kontinuums der Abb. 5 setzt sich demgemäß zusammen aus der elastischen Biegeenergie (3.61)

$$X Y f = \frac{X}{2} \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \sigma_{11}^* \varepsilon_{11}^* = \frac{G b^2}{12(1-\nu)} \frac{Y}{X} \quad (4.1)$$

und aus der Grenzflächenenergie E_a der Gleitebene

$$E_a = \frac{G b X}{4 \pi^2} \left\{ 1 + \frac{\pi b}{(1-\nu) X} - \sqrt{1 + \left(\frac{\pi b}{(1-\nu) X} \right)^2} \right\}, \quad (4.2)$$

die wir der Arbeit von VAN DER MERWE³⁹ [§ 5, Gl. (27)] entnehmen. (4.2) in Potenzreihe nach b/X entwickelt, ergibt

$$E_a = \frac{G b^2}{4 \pi (1-\nu)} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2(1-\nu)} \left(\frac{b}{X} \right) + \dots \right\}, \quad (4.3)$$

$b/X < 2(1-\nu)/\pi$.

Ein Vergleich zeigt deutlich, daß bei dem uns gemäß (3.64) interessierenden Fall $X/Y \ll 1$ die Grenzflächenenergie (4.3) gegenüber der elastischen Energie (4.1) zu vernachlässigen ist, der Beitrag des Zentrums also keine Rolle spielt. Dies ist verständlich, da in Abb. 5 das Spannungsfeld jeder Versetzung eine relativ große Reichweite der Größenordnung Y besitzt. Für Schraubenversetzungen gelten entsprechende Überlegungen.

§ 4.2. Momentenspannung

Was berechtigt uns aber zu sagen, daß die Energie (4.2) bzw. (4.3) Momentenspannungen zuzuschreiben ist? Zur Beantwortung dieser Frage schneiden wir aus dem Kristall der Abb. 5 eine Platte aus, welche den nichtelastischen Bereich des PEIERLSSchen

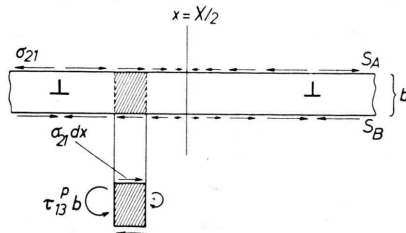


Abb. 8. Antisymmetrischer Spannungszustand im PEIERLSSchen Modell einer Stufenversetzung.

Modells umfaßt (Abb. 8). Sie besitzt die Dicke b und besteht nur aus zwei benachbarten Netzebenen. Die an ihrer oberen Ebene S_A angreifenden Schubspan-

nungen σ_{21} entnehmen wir der Arbeit von VAN DER MERWE³⁹ [§ 4, Gl. (23) mit $Z=0$] zu

$$\sigma_{21}(x, S_A) = - \frac{G}{4(1-\nu)} \frac{b}{X} \frac{\sin(2\pi x/X)}{\sin^2(\pi x/X) + \pi^2 \lambda^2} \quad (4.4)$$

mit $\lambda^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + [\pi b/(1-\nu) X]^2 - [\]}} + \sqrt{1 + [\]^2 - [\] - 2} \right\}$

oder

$$\lambda^2 = \left(\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{b}{X} \right)^2 + O([\]^3) + \dots \text{ für } [\] < 1. \quad (4.5)$$

Kontinuumstheoretisch gesehen, herrscht an der Platte der Abb. 8, die physikalisch nicht dünner als b gemacht werden kann, ein *antisymmetrischer Kraftspannungszustand*

$$\sigma_{[21]}^P (\text{Platte}) = \frac{1}{2} (\sigma_{21} - \sigma_{12}) = \frac{1}{2} \sigma_{21}(x, S_A), \quad (4.6)$$

denn es tritt wegen des Verschwindens der vertikalen Kraftübertragung keine σ_{12} -Komponente auf. (4.6) zieht gemäß (2.2) Momentenspannungen nach sich; da τ_{23} aus Symmetriegründen zu Null wird, gilt

$$\frac{\partial \tau_{13}^P}{\partial x_1} = 2 \sigma_{[21]}^P = \sigma_{21}(x, S_A) \quad (4.7)$$

$$\text{für } (n + \frac{1}{2}) Y - \frac{b}{2} \leq y \leq (n + \frac{1}{2}) Y + \frac{b}{2},$$

während überall sonst die rechte Seite der Gleichung verschwindet. Integriert ergibt sich für die nämlichen Bereiche

$$\tau_{13}^P(x, y) = \begin{cases} \int_{+X/2}^x \sigma_{21}(\xi, S_A) d\xi + \tau_{13}^P(X/2, y), \\ 0. \end{cases}$$

Mittelt man über das Volumenelement (3.3), so erhalten wir aus (4.8) die makroskopische (PEIERLS-) Momentenspannung

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{13}^P &= \frac{1}{X Y} \int_{-X/2}^{+X/2} dx \int_{-Y/2}^{+Y/2} dy \tau_{13}^P(x, y) \\ &= \frac{b}{X} \left\{ \frac{1}{X} \int_{-X/2}^{+X/2} dx \int_{-X/2}^x d\xi \sigma_{21}(\xi, S_A) + \tau_{13}^P\left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right) \right\} \quad (4.9) \end{aligned}$$

oder mit (4.4)

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{13}^P &= \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{b^2}{Y} \left[\ln 2 - \ln \left\langle 1 + \frac{\pi \lambda}{\sqrt{1 + \pi^2 \lambda^2}} \right\rangle \right] \\ &\quad + \frac{b}{Y} \tau_{13}^P\left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Entwickelt man (4.10) in eine Potenzreihe nach b/X , so sieht man, daß in erster Näherung das zweite Glied in der eckigen Klammer gegenüber dem ersten

zu vernachlässigen ist. Man bekommt dann, falls man die Strukturkrümmung K_{13} gemäß (1.2) und (3.39) einführt,

$$\bar{\tau}_{13}^P = \left[\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \frac{G(bX)}{1-\nu} + X \tau_{13}^P \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2} \right) \right] K_{13}, \quad (4.11)$$

so daß also $\bar{\tau}_{13}^P$ das gleiche Vorzeichen wie $\bar{\tau}_{13}$ in (3.43) besitzt.

Die Integrationskonstante $\tau_{13}^P(X/2, Y/2)$ läßt sich im Rahmen des PEIERLSSchen Modells nicht bestimmen, da hier die Momentenspannung einer Einzel-Versetzung ebenso wie die entsprechende Energie in unendlich großem Abstand vom Zentrum divergiert. Weil aber anzunehmen ist, daß beide Glieder in (4.11) von der gleichen Größenordnung sind, ist in Übereinstimmung mit der Argumentation in § 4.1 $\bar{\tau}_{13}^P$ in (4.11) wegen (3.64) gegenüber $\bar{\tau}_{13}$ in (3.43) zu vernachlässigen.

Im PEIERLSSchen Modell sind das Versetzungszentrum und damit auch die Momentenspannungen etwas in der Gleitebene „verschmiert“. Dies stellt natürlich insofern eine Idealisierung dar, als in Wirklichkeit diese Momentenspannungen – allerdings mit zunehmender Entfernung vom Zentrum rasch auf Null abklingend – über den ganzen Raum verteilt gedacht werden müssen. Daher dürfen wir (4.11) nur mehr zum Abschätzen der Größenordnung und zur Bestimmung des Vorzeichens von $\bar{\tau}_{13}^P$ benutzen.

Zusammenfassend kann man daher folgendes sagen: Wir haben mit Hilfe des PEIERLSSchen Versetzungsmodells in halb quantitativer Weise gezeigt, daß in Kristallen durch das Versetzungszentrum antisymmetrische Kraftspannungen $\sigma_{[21]}^P$ gemäß (4.6) und damit auch makroskopisch beobachtbare Momentenspannungen $\bar{\tau}_{13}^P$ entsprechend (4.11) verursacht werden. Im Falle $X/Y \ll 1$ können jedoch diese Effekte vernachlässigt werden.

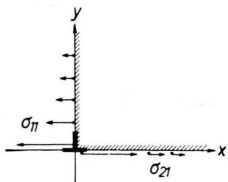


Abb. 9. Zum Beweis des Fehlens von zugeordneten Schubspannungen im Zentrum einer Versetzung.

Da bekanntlich aus dem PEIERLSSchen Modell einer Stufenversetzung durch Grenzübergang zu verschwin-

dender Versetzungsweite das elastizitätstheoretische Modell gewonnen werden kann, muß sich in dessen Versetzungszentrum ein singuläres divergierendes $\sigma_{[21]}$ nachweisen lassen. Aus (3.28) ersieht man tatsächlich, daß es keine zugeordneten Schubspannungen im Zentrum gibt, d. h. σ_{12} verschwindet, nicht aber σ_{21} (Abb. 9):

$$\begin{aligned} \sigma_{[21]}[\pm 0, 0] &= \frac{1}{2} (\lim_{x \rightarrow \pm 0} \sigma_{21}[x, 0] - \lim_{y \rightarrow 0} \sigma_{12}[0, y]) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \sigma_{21}[x, 0] = -\frac{A}{2} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Daraus ergibt sich in Analogie zu (4.7) im Zentrum eine divergierende Momentenspannung τ_{13} von delta-funktionsartigem Charakter. Übrigens erhält man ebenfalls (4.12), wenn man das mit Hilfe der nichtlinearen Elastizitätstheorie von PFLEIDERER et al.⁴⁰ in 2. Näherung errechnete Spannungsfeld einer Stufenversetzung verwendet.

Die in Abb. 9 aufgezeichnete Spannungsverteilung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der eines von REISSNER⁴¹ angegebenen Beispiels. Dort zeigte REISSNER, daß die Symmetrie des Spannungstensors in der klassischen Elastizitätstheorie für das Momentengleichgewicht wohl hinreichend, aber nicht notwendig ist, falls, wie in Abb. 9, die Spannungsgradienten unendlich werden dürfen.

§ 5. Materialgesetz für Momentenspannungen in isotroper Form

Das Volumenelement ΔV eines makroskopisch isotropen Vielkristalls bestehe aus sehr vielen Körnern, deren Orientierungen und Formen statistisch regellos verteilt seien. In jedem Korn seien Versetzungen vorhanden. Deren Wirkung bezüglich der Momenten-

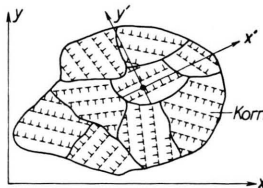


Abb. 10. Zweidimensionales Schema unseres Vielkristallmodells.

spannungen kann, wie wir in (3.46) gesehen haben, durch Stufenversetzungen allein beschrieben werden, falls wir im Sinne von § 4 den Beitrag des Versetzungszentrums vernachlässigen. Vorläufig wollen wir annehmen, daß in allen Körnern nur ein Gleitsystem vorhanden ist (Abb. 10). Dann kann man in jedes von ihnen ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen x' , y' und z' so hineinlegen, daß die vorhandenen wirksamen Versetzungen als $\alpha_{z'x'}$ -Ver-

⁴⁰ H. PFLEIDERER, A. SEEGER u. E. KRÖNER, Z. Naturforschg. 15 a, 758 [1960].

⁴¹ E. REISSNER, J. Math. Phys. 23, 192 [1944].

setzungen erscheinen (x' -Achse in Richtung des BURGERS-Vektors, z' -Achse parallel zur Linienrichtung der Stufenversetzung).

Nun wählen wir ein beliebiges xyz -Koordinatensystem, bezüglich dessen die $x'y'z'$ -Systeme in ihrer Orientierung etwa durch die drei EULERSchen Winkel Φ , Ψ und Θ , die wir zusammenfassend durch Ω symbolisieren, festgelegt seien. Dann gilt

$$d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi d\Psi, \\ \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Psi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} d\Omega = 8\pi^2.$$

Die entsprechenden Richtungskosinusse bezeichnen wir mit

$$A_i^{j'} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x_i, x_{j'}),$$

und ihre Produkte kürzen wir folgendermaßen ab:

$$A_i^{m'n'} \dots \stackrel{\text{def}}{=} A_i^{m'} A_j^{n'} \dots$$

Im Volumenelement ΔV liege zwischen den Orientierungen Ω und $\Omega + d\Omega$ eine Gruppe von Körnern mit der Versetzungsdichte

$$\alpha_{z'x'}^D(\Omega) d\Omega, \quad (5.1)$$

welche wir wegen (3.46) als Deviator schreiben. Will man die über ΔV gemittelte Versetzungsdichte $\bar{\alpha}_{ij}^D$ bezüglich des xyz -Koordinatensystems erhalten, so haben wir die α_{ij}^D -Komponente von (5.1) entsprechend dem Transformationsgesetz für Tensoren zu errechnen und anschließend über alle Winkel zu mitteln:

$$\bar{\alpha}_{ij}^D = \int_{\Omega} A_i^{z'x'} \alpha_{z'x'}^D d\Omega / 8\pi^2. \quad (5.2)$$

Andererseits betragen die von (5.1) hervorgerufenen Momentenspannungen gemäß (3.43)

$$\tau_{z'x'}(\Omega) d\Omega = \frac{G\nu}{6(1-\nu)} D^2(\Omega) \alpha_{z'x'}^D(\Omega) d\Omega, \quad (5.3)$$

$$\tau_{x'z'}(\Omega) d\Omega = -\frac{G}{6(1-\nu)} D^2(\Omega) \alpha_{z'x'}^D(\Omega) d\Omega, \quad (5.4)$$

da der Gleitebenenabstand D wegen der Homogenität im Volumenelement nur von der Orientierung abhängen kann. Daraus errechnet sich analog zu (5.2) die über ΔV gemittelte Momentenspannung im xyz -System zu

$$\bar{\tau}_{ij} = \int_{\Omega} A_i^{z'x'} \tau_{z'x'} d\Omega / 8\pi^2 + \int_{\Omega} A_i^{x'z'} \tau_{x'z'} d\Omega / 8\pi^2. \quad (5.5)$$

Rückblickend erkennen wir jetzt, daß man in allen Körnern unseres Volumenelements beliebig viele Gleitsysteme zulassen darf, sofern wir nur jedem ein x'_i -Koordinatensystem zuordnen.

Aus (5.5) ergibt sich wegen (5.2) – (5.4)

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{G}{6(1-\nu)} [\nu \bar{D}^2 \langle i, j \rangle \bar{\alpha}_{ij} - \bar{D}^2 \langle j, i \rangle \bar{\alpha}_{ji}], \quad (5.6)$$

wobei

$$\bar{D}^2 \langle i, j \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{\Omega} D^2(\Omega) A_i^{z'x'} \alpha_{z'x'}^D d\Omega}{\int_{\Omega} A_i^{z'x'} \alpha_{z'x'}^D d\Omega}$$

den quadratischen Mittelwert eines effektiven Gleitebenenabstandes bedeutet. In Zukunft wollen wir D als orientierungsunabhängig annehmen, weil nur dann der Materialtensor makroskopisch isotrop wird:

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{G D^2}{6(1-\nu)} [\nu \bar{\alpha}_{ij}^D - \bar{\alpha}_{ji}^D]. \quad (5.7)$$

Drücken wir in (5.7) die Versetzungsdichte gemäß (1.2) in der Strukturkrümmung \bar{K}_{ij} aus, so erhalten wir als Hauptergebnis unserer Arbeit bei Gültigkeit von (3.64) das *Materialgesetz* für Momentenspannungen in *isotroper* Form:

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{G D^2}{6(1-\nu)} [\bar{K}_{ij}^D - \nu \bar{K}_{ji}^D]. \quad (5.8)$$

Die in (2.10) eingeführten Moduln ergeben sich durch Koeffizientenvergleich zu

$$a_1 = -\frac{G D^2}{18}, \quad a_2 = \frac{G D^2}{6(1-\nu)}, \quad a_3 = -\frac{\nu G D^2}{6(1-\nu)}. \quad (5.9)$$

Kovariant aufgespaltet, schreibt sich (5.8)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_{ij}^D = a_2 \bar{K}_{ij}^D + a_3 \bar{K}_{ji}^D \\ \bar{\tau}_{ii} = a_0 K_{ii} = (3a_1 + a_2 + a_3) \bar{K}_{ii} = 0 \end{array} \right\}, \quad (5.10)$$

so daß zur Charakterisierung des Materials bezüglich der Momentenspannungen auch die drei Moduln a_0 , a_2 , a_3 verwendet werden können. Der Modul der „Torsionskrümmung“ a_0 verschwindet, wie wir schon in (3.10) bei Außerachtlassen des Versetzungszentrums (vgl. § 4) gesehen haben, während die Moduln der „longitudinalen Biegekrümmung“ a_2 bzw. der „transversalen Biegekrümmung“ a_3 die in (5.9) angegebenen Werte haben.

Nach (3.63) und (5.8) ergibt sich für die *Energiedichte*

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \bar{K}_{ij} \bar{\tau}_{ij} = \frac{G D^2}{12(1-\nu)} [\bar{K}_{ij}^D \bar{K}_{ij}^D - \nu \bar{K}_{ij}^D \bar{K}_{ji}^D]. \quad (5.11)$$

Da sie natürlich positiv definit sein muß, kann man für die Moduln die Ungleichungen

$$a_2 > 0, \quad a_2 \geq |a_3|, \quad a_2 \geq -\frac{3}{2} a_1 \quad (5.12)$$

ableiten, die, wie ein Blick auf (5.9) zeigt, für unsere Moduln auch tatsächlich erfüllt sind.

§ 6. Diskussion *

Die Feldtheorie der Versetzungen lehrt in ihrer differentialgeometrischen Form, daß man einen versetzten Festkörper im natürlichen Zustand als materiellen *nichteuclidischen* Raum interpretieren kann (vgl. z. B. ²⁶). Die *Torsion* $\bar{\Gamma}_{[ml]k}$ dieses Raumes entspricht dabei nach KONDO ⁴⁴ und BILBY et al. ⁴⁵ der Versetzungsdichte

$$\bar{\alpha}_{nk} = \epsilon_{nml} \bar{\Gamma}_{[ml]k}, \quad (6.1)$$

während die *Metrik* durch den Dehnungstensor $\bar{\epsilon}_{ij}$ beschrieben wird. Dieser Raum ist eindeutig definiert durch Vorgabe seiner affinen *Konnexion*

$$\bar{\Gamma}_{mlk} = -(\bar{\epsilon}_{lk,m} + \bar{\epsilon}_{mk,l} - \bar{\epsilon}_{lm,k}) - \epsilon_{lkn} \bar{K}_{mn}. \quad (6.2)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck stellt das doppelte des zu $\bar{\epsilon}_{ij}$ gehörigen CHRISTOFFEL-Symboles 2. Art dar; \bar{K}_{mn} ist wie üblich die Strukturkrümmung, die gemäß (6.2) der Torsion und damit wegen (6.1) auch der Versetzungsdichte ¹ äquivalent ist.

Man kann nun zeigen (vgl. z. B. AMARI ⁴⁶), daß sich die elastischen Relativdrehungen $d\omega_{lk}$ zweier benachbarter Volumenelemente folgendermaßen berechnen lassen:

$$d\omega_{lk} = -\bar{\Gamma}_{m[lk]} dx_m. \quad (6.3)$$

$-\bar{\Gamma}_{m[lk]}$ spielt also die Rolle eines Krümmungstensors; nach (6.2) gilt für ihn

$$-\bar{\Gamma}_{m[lk]} = \bar{\epsilon}_{mk,l} - \bar{\epsilon}_{ml,k} + \epsilon_{lkn} \bar{K}_{mn}. \quad (6.4)$$

Mit

$$\bar{\alpha}_{mn} = \epsilon_{nrs} \bar{\epsilon}_{ms,r} = \epsilon_{nrs} \bar{\epsilon}_{m[s,r]} \quad (6.5)$$

läßt sich dafür schreiben

$$-\bar{\Gamma}_{m[lk]} = \epsilon_{lkn} (\bar{\alpha}_{mn} + \bar{K}_{mn}). \quad (6.6)$$

In $\bar{\alpha}_{mn}$ erkennen wir den schon in (2.12) definierten Tensor wieder, der die von den Dehnungen verursachten Krümmungen mißt. Allerdings ist in der Feldtheorie der Versetzungen, anders als in der klassischen und in der COSSERATschen Elastizitätstheorie, die Dehnung nicht mehr aus einem eindeutigen Verschiebungsfeld ableitbar. (6.6) sagt aus, daß sich die *Gesamtkrümmung* $-\bar{\Gamma}_{m[lk]}$ additiv aus der *Dehnungskrümmung* $\bar{\alpha}_{mn}$ und der COSSERAT-NYESchen *Strukturkrümmung* \bar{K}_{mn} zusammensetzt.

Man muß aber beachten, daß $\bar{\alpha}_{mn}$ und \bar{K}_{mn} ihrem Wesen nach völlig verschiedene Größen sind. Während $\bar{\alpha}_{mn}$ nach (6.5) ursächlich mit Dehnungen verbunden ist, deren Reaktionen die Kraftspannungen sind, hat \bar{K}_{mn} 9 eigene funktionale Freiheitsgrade und kann selbstverständlich, wie z. B. in Abb. 5, auch bei verschwindender makroskopischer Dehnung auftreten.

Im Spezialfall der klassischen Elastizitätstheorie sind die Strukturkrümmungen \bar{K}_{mn} gleich Null und es verbleiben nur die Krümmungen $\bar{\alpha}_{mn}$. Die diesen Krümmungen zugeordneten Momentenspannungen sind nach § 2.1 vernachlässigbar. Versetzungen rufen jedoch Strukturkrümmungen \bar{K}_{mn} hervor, die ihrerseits nach (5.8) als statische Reaktionen nicht zu vernachlässigende Momentenspannungen bedingen. Daraus ersehen wir, daß man die Momentenspannungen *nicht* als Reaktionen auf die Gesamtkrümmung $-\bar{\Gamma}_{m[lk]}$ auffassen darf. Vielmehr entsprechen den Momentenspannungen auf der geometrischen Seite die Strukturkrümmungen.

Im Sinne des LAGRANGESchen Befreiungsprinzips (vgl. HAMEL ⁴⁷) sind demzufolge die Kraftspannungen $\bar{\sigma}_{(ij)}$ als Reaktionen auf die Dehnungen $\bar{\epsilon}_{ij}$ und die Momentenspannungen $\bar{\tau}_{ij}$ als Reaktionen auf die davon unabhängigen *Strukturkrümmungen* \bar{K}_{ij} zu verstehen. Daher darf man unseres Erachtens auch

* Bezüglich der Momentenspannungen sei noch auf die neuesten Arbeiten von ERINGEN ⁴² und MINDLIN ⁴³ hingewiesen, die hier leider nicht mehr berücksichtigt werden konnten.

⁴² A. C. ERINGEN, Int. J. Engng. Sci. **2**, 189 [1964].

⁴³ R. D. MINDLIN, Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 51 [1964].

⁴⁴ K. KONDO, Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., p. 41 [1952].

⁴⁵ B. A. BILBY, R. BULLOUGH u. E. SMITH, Proc. Roy. Soc., Lond. A **231**, 263 [1955].

⁴⁶ S. AMARI, RAAG Memoirs **3**, 99, Gakujutsu Bunken Fukyukai, Tokio 1962.

⁴⁷ G. HAMEL, Theoretische Mechanik, Springer-Verlag, Berlin 1949.

* Das Materialgesetz des antisymmetrischen Teils des Kraftspannungstensors $\sigma_{[ij]}$ wurde hier übergangen; inzwischen ist es in einer anderen Mitteilung behandelt worden ⁴⁸. Dabei stellte sich heraus, daß $\sigma_{[ij]}$ in der Feldtheorie der Versetzungen verschwindet, da die $\sigma_{[ij]}$ zuzuordnende geometrische Größe plastischer Natur ist. Daher kann man auch auf $\sigma_{[ij]}$ das LAGRANGESche Befreiungsprinzip nicht anwenden.

⁴⁸ E. KRÖNER, Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., München 1964, im Druck.

im Rahmen der ursprünglichen kompatiblen COSSERAT-schen Theorie die Momentenspannungen nicht der Gesamtkrümmung zuordnen, wie das verschiedentlich gemacht wurde. Dagegen scheinen die von DJURITCH²⁵ ebenfalls im COSSERAT-Kontinuum eingeführten „Drehspannungen“ (*stress of rotation*), deren physikalische Interpretation er offen läßt, unseren von Versetzungen hervorgerufenen Momen-

tenspannungen zu entsprechen, während „seine“ Momentenspannungen der klassischen Kinematik entsprechen und daher zu vernachlässigen sind.

Einer der Verfasser (F.H.) ist Herrn Dr. R. STOJANOVITCH für zahlreiche Diskussionen über den RICCI-Kalkül sehr verbunden. Außerdem danken wir Herrn Dr. U. KOCKS für kritische Anmerkungen zum Begriff der Momentenspannungen.

Zur Theorie der strahlungslosen Umwandlungen von F- in F'-Zentren

HERMANN RAMPACHER

Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. 20 a, 350—359 [1965]; eingegangen am 11. August 1964)

Der vorgegebene Realkristall sei überschneidungsfrei aus wechselwirkungsfreien Mikroblöcken zusammengesetzt, deren jeder genau ein Störzentrum enthält. Die Elektronen und Atomkerne im Mikroblock seien adiabatisch gekoppelt. Die Kernbewegung wird in harmonischer Näherung behandelt. Die Matrixelemente der nichtadiabatischen und die der nichtharmonischen Terme lassen sich strahlungslosen elektronischen bzw. Gitter-Übergängen zuordnen. Setzt man die experimentell begründete Modellvorstellung von F- und F'-Zentren voraus, so lassen sich für Mikroblöcke mit entweder einem F'-Zentrum oder einem F-Zentrum im Grundzustand und einem Leitungsbandelektron näherungsweise die quantenmechanischen Zustände sowie die Übergangsmatrixelemente bestimmen. Dabei wird insbesondere die ausschließliche Kopplung der Elektronen an den als vollständig entartet angenommenen longitudinalen Anteil des optischen Zweigs der Gitterschwingungen des Idealkristalls postuliert. Mit Hilfe der Zustände der einzelnen Mikroblöcke läßt sich eine Ensemble-Statistik gewinnen, die zu einem Ausdruck für die differentiellen Übergangswahrscheinlichkeiten strahlungsloser elektronischer Übergänge führt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind allerdings an sämtliche Besetzungswahrscheinlichkeiten des quantenmechanischen Gesamtsystems, zu dem im allgemeinen auch das Strahlungsfeld gehört, rückgekoppelt. Aus den Grundgleichungen der Ensemble-Statistik folgen reaktionskinetische Gleichungen für mittlere zeitabhängige Elektronen- und Gitterquantenbesetzungszahlen, welche angegeben werden. Diese Gleichungen lassen sich numerisch integrieren. Da aber das Strahlungsfeld per definitionem ausgeschlossen wird, ist ein Vergleich der Theorie mit dem Experiment auf dieser Stufe noch nicht möglich, weshalb auf die praktische Lösung der reaktionskinetischen Gleichungen verzichtet wird.

In dieser Arbeit sollen strahlungslose Übergänge zwischen zwei Niveaus eines einfachen Zwei-Elektronen-Systems quantenmechanisch untersucht werden. Der eine Zustand korrespondiert dem der F'-Zentren-Elektronen, der andere einem solchen, in dem sich ein Elektron ruhend am unteren Rande des Leitungsbandes befindet, ein anderes gebunden im Grundzustand des F-Zentrums. Eine Korrespondenz zwischen Theorie und Experiment läßt sich allerdings im Rahmen dieser Arbeit noch nicht nachweisen, da ein Vergleich eine vollständige Berücksichtigung der elektronischen Prozesse an F- und F'-Zentren erfordert. In einer weiteren Arbeit soll dann eine umfassendere Darstellung gegeben werden, die Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen zuläßt.

Die hier darzulegende Theorie geht von der von STUMPF¹ entwickelten Konzeption der Quantentheorie der Ionenrealkristalle aus. Wir stellen uns den vorgegebenen Realkristall überschneidungsfrei aus Mikroblöcken zusammengesetzt vor. Jeder Mikroblock enthält genau ein Störzentrum. Bei den üblichen Störstellenkonzentrationen kann man die quantenmechanischen Vorgänge in den einzelnen Mikroblöcken als voneinander unabhängig betrachten: Die Mikroblöcke treten dann als statistisches Ensemble in Erscheinung.

Bei der Berechnung der Zustände eines einzelnen Mikroblocks setzen wir die adiabatische Kopplung^{1, 2} von Elektronen und Kernen voraus. Zur Lösung des Kristallelektronenproblems greifen wir auf die am

¹ H. STUMPF, Quantentheorie der Ionenrealkristalle, Springer-Verlag, Berlin 1961.

² A. HAUG, Theoretische Festkörperphysik, Verlag Franz Deuticke, Wien 1964.